E. N. S. E. R. B. Programme P

CONCOURS DE JUIN 1974

Epreuve de Mathématiques

(Durée : 4 h)

- I -

On s'intéresse à la droite (D) d'équation $x\sqrt{2} + y\sqrt{3} - 4 = 0$ et au point F de coordonnées $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ dans un repère orthonormé du plan.

Trouver le lieu des points M dont le rapport des distances au point F et à la droite (D) est égal à $\frac{MF}{MH} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

- II -

1°) On s'intéresse à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer ses valeurs propres. Trouver les vecteurs propres.

2°) Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ classique, déterminer le vecteur propre normé $\vec{f_1}$ de A qui est dans le premier quadrant, ainsi que le vecteur propre normé $\vec{f_2}$ de A qui est dans le second quadrant. Que peut-on dire de $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$?

3°) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ on considère la courbe (H) d'équation

$$f(x,y) = 2x^2 - 2xy\sqrt{6} + y^2 + 4 = 0$$

On prend comme nouveau repère $(\vec{f_1}, \vec{f_2})$ défini en 2°).

Quelle est la nouvelle équation F(X, Y) = 0 de la courbe (H) ?

Nature de cette courbe.

.../...

III -

1°) Construire le graphe de la fonction

$$y = x\sqrt{6} + 2\sqrt{x^2 - 1}$$

On précisera notamment les asymptotes et la position du graphe par rapport aux asymptotes.

2°) Calculer $\int_1^2 (x\sqrt{6} + 2\sqrt{x^2 - 1})\, dx$

- IV -

On s'intéresse à l'équation différentielle (E)

$(1 - x^2)\, y'' - xy' + y = 0$ et on se propose d'en trouver les solutions qui sont développables en série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ autour de 0.

1°) Etablir une relation de récurrence entre a_n et a_{n+2}.

2°) Que peut-on dire de la partie impaire $\sum_{p=0}^{\infty} a_{2p+1} x^{2p+1}$ de ce développement ?

3°) Calculer a_{2p} en fonction de a_0. Ecrire le développement $\sum_{p=0}^{\infty} a_{2p} x^{2p}$, trouver son rayon de convergence, et reconnaître la fonction élémentaire dont elle est le développement.

En déduire toutes les solutions de (E) qui sont développables en série entière autour de 0.

- V -

On s'intéresse à l'équation différentielle (E)

$(1 - x^2)\, y'' - xy' + y = 0$

Remarque qu'elle possède une solution particulièrement simple et évidente.

Intégrer l'équation (E).

.../...

- VI -

On considère l'équation différentielle (E)

$$(1 - x^2)\, y'' - xy' + y = 0$$

On pose $x = \phi(t)$ et $y = \psi(t)$.

1°) Que devient l'équation (E) ?

2°) Choisir ϕ de façon que l'équation différentielle en ψ soit alors à coefficients constants.

3°) Intégrer cette dernière équation pour les différents choix possibles de ϕ ; on obtient alors des représentations paramétriques des solutions de (E).

4°) Donner toutes les solutions de l'équation (E) sous la forme y = une fonction de x.

N. B. : Les 6 parties peuvent être traitées indépendamment les unes des autres ; il importe toutefois que le candidat qui aura choisi de les résoudre dans un ordre différent le signale sans ambiguïté.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail